Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität
Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 6

→ 26.10.2015, 12:00

Aufgabe 1 *"Lagrange interpolation formula"*

Sei K ein Körper, $m, n \geq 1$, und $p_1, \dots, p_m \in K^n$ endlich viele verschiedene Punkte. Zu beweisen: für alle $a_1, \dots, a_m \in K$ gibt es ein Polynom $R \in K[X_1, \dots, X_n]$ in n Variabeln mit Koeffizienten aus K, so dass $R(p_i) = a_i$ für $i = 1, \dots, m$.
Tipp: Benutzen Sie den Chinesischen Restsatz mit $\mathfrak{a}_i = \{F \in K[X_1, \dots, X_n] \mid F(p_i) = 0\}$.

Aufgabe 2

Finden Sie alle Primideale und Maximalideale von $\mathbb{C}[X]$.
Tipp: $\mathbb{C}[X]$ *ist ein Hauptidealring und jedes Polynom* $P \in \mathbb{C}[X] \setminus \{0\}$ *lässt sich schreiben als* $\lambda(X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdots (X - a_r)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a_1, \dots, a_r \in \mathbb{C}$.

Aufgabe 3 *"Eulersche Funktion"*

Sei $n \geq 2$ eine ganze Zahl. Man definiert $\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|$.

1. Beweisen Sie, dass $\varphi(p) = p - 1$, wenn p eine Primzahl ist.

   Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2 vom Blatt 3.

2. Beweisen Sie, dass $\varphi(p^m) = p^m - p^{m-1} = p^{m-1}(p-1)$ wenn p eine Primzahl ist, und $m \geq 1$.

   Tipp: Benutzen Sie Aufgabe 2 vom Blatt 3.

3. Beweisen Sie, dass $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$, wenn m, n teilerfremnd (koprim) sind.

   Tipp: Benutzen Sie den Chinesischen Restsatz um zu beweisen, dass $\mathbb{Z}/(mn)\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

4. Berechnen Sie $\varphi((p_1)^{a_1} \cdots (p_r)^{a_r})$, wenn $p_1, \dots, p_r$ verschiedene Primzahlen sind und $a_1, \dots, a_r \geq 1$.

5. Berechnen Sie $\varphi(2015)$.

Aufgabe 4

1. Finden Sie einen kommutativen Ring A und Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ so dass $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} = \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
2. Finden Sie einen kommutativen Ring A und Ideale $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}$ so dass $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{b} \neq \mathfrak{a} \cap \mathfrak{b}$.
3. Finden Sie einen kommutativen Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} = \mathfrak{a}$.
4. Finden Sie einen kommutativen Ring A und ein Ideal $\mathfrak{a}$, so dass $\mathfrak{a} \cdot \mathfrak{a} \neq \mathfrak{a}$.

Aufgabe 5

Wir definieren $A = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}] = \{a + b\sqrt{-5} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}$.

1. Beweisen Sie, dass A ein Unterring von $\mathbb{C}$ ist.
2. Wir definieren $N(a + b\sqrt{-5}) = a^2 + 5b^2$. Beweisen Sie, dass $N(x \cdot y) = N(x) \cdot N(y)$, für alle $x, y \in A$.
3. Bemerken Sie, dass $3 \cdot 3 = (2 + \sqrt{-5}) \cdot (2 - \sqrt{-5})$ und dass $N(2 + \sqrt{-5}) = N(2 - \sqrt{-5}) = 9$.
4. Beweisen Sie, dass $N(x) \neq 3$ für jedes $x \in A$.
5. Beweisen Sie, dass $(3) = \{3 \cdot x \mid x \in A\} \subset A$ kein Primideal ist.
6. Beweisen Sie, dass 3 irreduzibel ist: aus $3 = a \cdot b$ und $a, b \in A$ folgt, dass $a \in A^*$ oder $b \in A^*$.