Jérémy Blanc
Mattias Hemmig
Patrick Schaffter
Francesco Veneziano

ALGEBRA
Herbstsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 9

→ 16.11.2015, 12:00

Aufgabe 1

Sei A ein faktorieller Ring. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für jedes Primideal $\mathfrak{p} \subset A$ hat man Inklusionen
$$A \subset A_{\mathfrak{p}} \subset Q(A),$$
wo $Q(A)$ der Quotientenkörper von A ist.

2. Wir haben
$$A = \bigcap_{\mathfrak{p}\subset A,\text{Primideal}} A_{\mathfrak{p}} = \bigcap_{\mathfrak{m}\subset A,\text{Maximalideal}} A_{\mathfrak{m}}.$$
Tipp: Beweisen Sie $A \subset \bigcap_{\mathfrak{p}\subset A,\textit{Primideal}} A_{\mathfrak{p}} \subset \bigcap_{\mathfrak{m}\subset A,\textit{Maximalideal}} A_{\mathfrak{m}} \subset A$ *und bemerken Sie, dass die zwei ersten Inklusionen einfach sind. Für die letzte, benutzen Sie Folgerung 8.15(3).*

Aufgabe 2

Sei K ein Körper und $P \in K[X]$ ein Polynom. Wir erinnern, dass $P \in (K[X])^* \Leftrightarrow P \in K^*$ (Blatt 4). Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. $\deg(P) = 1 \Rightarrow P$ hat eine Nullstelle (d.h. es gibt $a \in K$ mit $P(a) = 0$).
2. $\deg(P) = 1 \Rightarrow P$ ist irreduzibel.
3. Wenn $\deg(P) \in \{2,3\}$ ist P irreduzibel, genau dann wenn P keine Nullstelle hat.
4. Die irreduziblen Polynome von $\mathbb{C}[X]$ sind von der Form $\lambda(X-a)$, $\lambda \in \mathbb{C}^*$, $a \in \mathbb{C}$.
5. Die irreduziblen Polynome von $\mathbb{R}[X]$ sind
$$\{P \in \mathbb{R}[X] \mid \deg(P) = 1 \text{ oder } \deg(P) = 2 \text{ und } P \text{ hat keine Nullstelle in } \mathbb{R}\}$$
Tipp: Beweisen Sie, dass $P = \lambda \prod_{i=1}^{r}(X-a_i)$, *mit* $a_1,\ldots,a_r \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $r = \deg(P)$ *und bemerken Sie, dass wenn* $a_i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$, *hat man* $P(a_i) = 0 \Rightarrow P(\overline{a_i}) = 0$.

Aufgabe 3

1. Für $n = 1,2,3$, finden Sie $P_n \in \mathbb{F}_2[X]$ mit $\deg(P_n) = n$ und P_n irreduzibel in $\mathbb{F}_2[X]$.
Tipp: Benutzen Sie Teil 4 *von der Aufgabe* 2.
2. Ist $\mathbb{F}_2[X]/(P_n)$ ein Integritätsring? Ist $\mathbb{F}_2[X]/(P_n)$ ein Körper?
(*Tipp: Benutzen Sie Lemma 8.5.*)
3. Wie viele Elemente enthält $\mathbb{F}_2[X]/(P_n)$?

Aufgabe 4

Sei A ein faktorieller Ring. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Für $a,b \in A \setminus \{0\}$ gilt: $a|b \Leftrightarrow \nu_p(a) \le \nu_p(b)$ für jedes $p \in A$ prim.
2. Für $p,q \in A$ prim gilt: $\nu_p(a) = \nu_q(a)$ für jedes $a \in A \setminus \{0\} \Leftrightarrow p$ und q sind assoziiert.
3. Für $a \in A \setminus \{0\}$ gilt: $a \in A^* \Leftrightarrow \nu_p(a) = 0$ für jedes $p \in A$ prim.

Aufgabe 5

Sei $\theta = \frac{1+\sqrt{-19}}{2} \in \mathbb{C}$. Wir möchten beweisen, dass $A = \mathbb{Z}[\theta]$ ein Hauptidealring ist (und wissen schon, dass er nicht euklidisch ist). Wir möchten beweisen, dass jedes Ideal $\mathfrak{a} \subset A$ ein Hauptideal ist. Wenn $\mathfrak{a} = (0)$ ist $\mathfrak{a}$ ein Hauptideal. Wir können also $x \in \mathfrak{a} \setminus \{0\}$ wählen, so dass $|x|$ minimal ist und beweisen, dass $\mathfrak{a} = (x)$, d.h. jedes $y \in \mathfrak{a}$ ein Vielfaches von x ist; das bedeutet, dass die komplexe Zahl $\frac{y}{x}$ in A liegt.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen (und jeden Schritt):

1. Für jedes $y \in \mathfrak{a}$ und jedes $z \in A$ hat man $y + xz \in \mathfrak{a}$, $-y + xz \in \mathfrak{a}$ und
$$y \in (x) \Leftrightarrow y + xz \in (x) \Leftrightarrow -y + xz \in (x),$$
also können wir y durch $y + xz$ oder $-y + xz$ ersetzen.
2. Für jedes $u \in \mathbb{C}$ gibt es $z \in A$, so dass $u + z \in \left\{ a + ib \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}, |b| \le \frac{\sqrt{19}}{4} \right\}$.
3. Für jedes $u \in \mathbb{C}$ gibt es $z \in A$, so dass $u + z$ oder $-u + z$ in
$$Q = \left\{ a + ib \,\middle|\, a,b \in \mathbb{R}, 0 \le a < 1, 0 \le b \le \frac{\sqrt{19}}{4} \right\}$$
liegt.
4. Für jedes $y \in \mathfrak{a}$ gibt es $z \in A$, so dass $y' = y + xz$ oder $y' = y - xz$ in erfüllt $\frac{y'}{x} \in Q$. Wir können also annehmen, dass $\frac{y}{x} \in Q$.
5. Wir nehmen $y \in \mathfrak{a}$, mit $\frac{y}{x} \in Q$, d.h. $\frac{y}{x} = a + ib$, $0 \le a < 1, 0 \le b \le \frac{\sqrt{19}}{4}$, und beweisen, dass $y \in (x)$ (d.h. $\frac{y}{x} \in A$).
   (a) Wenn $b < \frac{\sqrt{3}}{2}$, gibt es $n \in \{0,1\}$, so dass $|\frac{y}{x} - n| < 1$.
   Aus $|y - nx| < |x|$ folgt, dass $y = nx \in (x)$.
   (b) Wenn $\frac{\sqrt{3}}{2} \le b \le \frac{\sqrt{19}}{4}$, finden wir, dass
   $\theta - 2\frac{y}{x} = \left(\frac{1}{2} - 2a\right) + ib'$, wo $b' = \frac{\sqrt{19}}{2} - 2b$ ist so dass $0 \le b' < \frac{\sqrt{19}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} < \frac{\sqrt{3}}{2}$.
   Es gibt dann $n \in \mathbb{Z}$, so dass $|\theta - 2\frac{y}{x} - n| \le 1$.
   Aus $|\theta x - 2y - nx| < |x|$ folgt, dass $\theta x - 2y - nx = 0$, so $2\frac{y}{x} \in A$.
   (c) Aus $\frac{y}{x} \in Q$, $2\frac{y}{x} \in A$ und $\frac{y}{x} \notin A$, folgt, dass $\frac{y}{x} \in \left\{ \frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{-19}}{4}, \frac{3+\sqrt{-19}}{4} \right\}$.
   (d) Wenn $\frac{y}{x} = \frac{1+\sqrt{-19}}{4} = \frac{\theta}{2}$ hat man $(1-\theta) \cdot \frac{y}{x} = \overline{\theta} \cdot \frac{y}{x} = \frac{5}{2}$.
   Aus $0 \ne |(1-\theta) \cdot \frac{y}{x} - 2| < 1$ folgt, dass $0 \ne |(1-\theta) \cdot y - 2x| < |x|$, ein Widerspruch.
   (e) Wenn $\frac{y}{x} = \frac{3+\sqrt{-19}}{4} = \frac{1+\theta}{2}$ hat man $(2-\theta) \cdot \frac{y}{x} = (1+\overline{\theta}) \cdot \frac{y}{x} = \frac{7}{2}$.
   Aus $0 \ne |(2-\theta) \cdot \frac{y}{x} - 3| < 1$ folgt, dass $0 \ne |(2-\theta) \cdot y - 3x| < |x|$, ein Widerspruch.