Jérémy Blanc
Enrica Floris

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 2

→ 03.03.2017 (12h)

Wir arbeiten über ein Körper $\mathbf{k}$, algebraisch abgeschlossen und schreiben

$$\mathbb{A}^n = \mathbb{A}^n(\mathbf{k}), \mathbb{P}^n = \mathbb{P}^n(\mathbf{k})$$

für jedes $n \geq 1$.

Aufgabe 1

Sind die folgenden Morphismen abgeschlossen? Wenn ja, finden Sie Gleichungen für das Bild.

1. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{P}^1 & \mapsto & \mathbb{P}^3 \\ [u:v] & \mapsto & [u^3 : uv^2 : u^2v : v^3] \end{array}$$

2. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^1 & \mapsto & \mathbb{A}^3 \\ t & \mapsto & (t^2, t^3, t^5) \end{array}$$

3. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^2 & \mapsto & \mathbb{A}^3 \\ (t,u) & \mapsto & (t,u,t+u) \end{array}$$

4. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^2 & \mapsto & \mathbb{A}^3 \\ (t,u) & \mapsto & (tu, tu^2, tu^3) \end{array}$$

5. $$\begin{array}{rcl} \mathbb{A}^3 & \mapsto & \mathbb{A}^2 \\ (t,u,v) & \mapsto & (t,u) \end{array}$$

Aufgabe 2

Sei $\Delta \subset \mathbb{P}^1$ eine endliche Teilmenge, mit $r \geq 0$ Elementen. Wenn ist $\mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ eine affine Varietät? Ist $\mathbb{P}^1 \setminus \Delta$ glatt?

Aufgabe 3

Sei $\pi \colon \mathbb{A}^2 \to \mathbb{A}^2$ der Morphismus $(x,y) \mapsto (x, xy)$.
Ist π abgeschlossen? Ist π birational?
Beschreiben Sie das Urbild von einem Punkt $(a,b) \in \mathbb{A}^2$.

Aufgabe 4

Wir nehmen $r \geq 1$ Punkte $a_1, \ldots, a_r \in \mathbf{k}$, die paarweise verschieden sind. Geben Sie eine algebraische Teilmenge $\Gamma \subset \mathbb{A}^2$ und ein Isomorphism $\mathbb{A}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_r\} \xrightarrow{\simeq} \Gamma$.
Tipp: Mann kann Γ wählen, so dass der Isomorphismum $\Gamma \to \mathbb{A}^1 \setminus \{a_1, \ldots, a_r\}$ der Form $(x,y) \mapsto x$ ist.