

Übungen - Blatt 3

→ 07.10.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei \mathbf{k} ein Körper und $f, g \in \mathbf{k}[x, y]$ zwei Polynome, die koprim sind. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. f, g sind auch koprim in $\mathbf{k}(x)[y]$.
2. $(f, g) = (1)$ in $\mathbf{k}(x)[y]$.
3. Es gibt $R, S \in \mathbf{k}(x)[y]$, so dass $fR + gS = 1$.
4. Es gibt $D \in \mathbf{k}[x] \setminus \{0\}$ und $A, B \in \mathbf{k}[x, y]$, so dass $Af + Bg = D$.
5. Die Menge $V(f, g) \subset \mathbb{A}^2(\mathbf{k})$ ist endlich.

Aufgabe 2

Sei \mathbf{k} ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ ist irreduzibel;
2. $\mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ ist zusammenhängend;
3. \mathbf{k} ist unendlich.

Aufgabe 3

Sei Z ein topologischer Raum und $f: Z \rightarrow \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ eine Abbildung, sei \mathbf{k} ein Körper und $n \geq 1$. Beweisen Sie, dass die folgenden Behauptungen äquivalent sind:

1. Die Abbildung f ist stetig.
2. Für jedes Polynom $P \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ ist $f^{-1}(V(P))$ abgeschlossen in Z .

Aufgabe 4

Welche sind die irreduzible Teilmengen von $\mathbb{A}^1(\mathbf{k})$?

Aufgabe 5

Welche sind die irreduzible Teilmengen von $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, wenn \mathbf{k} unendlich ist?

Tipp: Benutzen Sie Aufgaben 1 und 3. Die Antwort sollte sein: \emptyset , $\mathbb{A}^2(\mathbf{k})$, Punkte und die unendlichen Mengen $V(f)$, wobei f irreduzibel ist.