Übungen - Blatt 4

$\rightarrow$ *14.10.2016 (12h)*

Aufgabe 1

Finden Sie die Zerlegung von $V(x_1^2+x_2^2-1, x_1x_3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ in irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 2

Finden Sie die Zerlegung von

$$V((x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(x_1^2-2x_1), (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)x_2, (x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)x_3x_1) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$$

in irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 3

Sei $X = \{(t, t^2, t^3) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Finden Sie $I(X)$ und beweisen Sie, dass X abgeschlossen und irreduzibel ist.

Tipp: Sie sollten ein Isomorphismus $\mathbb{A}^1(\mathbb{C}) \to X$ finden und benutzen.

Aufgabe 4

Finden Sie Gegenbeispiele von Folgerung 3.17(1), 3.17(2), 3.17(3) und 3.17(4), wenn $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ und $\mathbf{k} = \mathbb{F}_2$ (8 Beispiele zu finden).

Aufgabe 5

1. Sei R ein faktorieller Ring, $a \in R$ prim. Beweisen Sie, dass es kein Primideal $I \subset R$ gibt, mit $(0) \subsetneq I \subsetneq (a)$.
2. Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossen Körper und $F \subset \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ ein irreduzible Polynom. Beweisen Sie, dass es kein irreduzibeln algebraischen Teilmenge $W \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ gibt, so dass $V(F) \subsetneq W \subsetneq \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$.