Übungen - Blatt 5

→ 21.10.2016 (12h)

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper. Ist $\mathscr{O}(Y)$ ein faktorieller Ring ?

1. $Y = \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$, $n \geq 1$.
2. $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x = y^5 + y\}$.
3. $Y = \{(X_1,X_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid X_1X_2 = 1\}$.
   (*Tipp: Beweisen Sie, dass $\mathscr{O}(Y)$ isomorph zu $\mathbf{k}[X,\frac{1}{X}] \subset \mathbf{k}(X)$ ist und dass jedes Element von $\mathbf{k}[X,\frac{1}{X}]$ der Form $(X)^n \cdot F$ ist, wo $n \in \mathbb{Z}$ und $F \in \mathbf{k}[X]$ ein Polynom ist, das kein Vielfaches von X ist*).
4. $Y = \{(X_1,X_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid (X_1)^2 = (X_2)^3\}$
   (*Tipp: Bemerken Sie, dass die Klassen $x_1 = [X_1], x_2 = [X_2] \in \mathscr{O}(Y)$ von X_1 und X_2 in $\mathscr{O}(Y)$ irreduzibel sind und $(x_1)^2 = (x_2)^3$) erfüllen.*

Aufgabe 2

1. Berechnen Sie $\mathscr{O}(\mathbb{A}^n(\mathbf{k}))^*$ für $n \geq 1$.
2. Berechnen Sie $\mathscr{O}(Y_1)^*$ für $Y_1 = \{(X_1,X_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid X_1X_2 = 1\}$.
3. Berechnen Sie $\mathscr{O}(Y_2)^*$ für $Y_2 = \{(X_1,X_2) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid X_1(X_2)^2 = 1\}$.
   (*Tipp: Beweisen Sie, dass $\mathscr{O}(Y_i)$ isomorph zu $\mathbf{k}[X,\frac{1}{X}] \subset \mathbf{k}(X)$ ist, für $i = 1,2$.*)
4. Sind Y_1 und Y_2 isomorph zueinander?
5. Beweisen Sie, dass allen Morphismen $\mathbb{A}^n(\mathbf{k}) \to Y_1$ konstant sind (das Bild ist ein Punkt), für jedes $n \geq 1$.
   (*Wenn $\psi \colon A \to B$ ein Ringhomomorphismus ist, beweisen Sie, dass $\psi(A^*) \subset B^*$*).

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ ein unendlicher Körper und $Y = \{(x,y) \in \mathbb{A}^2(\mathbf{k}) \mid x^2 = y^3\}$.

1. Beweisen Sie, dass der Morphismus
$$\begin{array}{rcl} \psi\colon \mathbb{A}^1(\mathbf{k}) & \to & X \\ u & \mapsto & (u^3, u^2) \end{array}$$
bijektiv ist.

2. Ist $\psi^*\colon \mathscr{O}(X) \to \mathscr{O}(\mathbb{A}^1(\mathbf{k}))$ injektiv? Ist er surjektiv?

3. Beweisen Sie, dass ψ kein Isomorphismus ist.

4. Beweisen Sie, dass kein Isomorphismus $Y \xrightarrow{\simeq} \mathbb{A}^1(\mathbf{k})$ existiert.
(*Tipp: Benutzen Sie Aufgabe* 1).

Aufgabe 4

Beweisen Sie, dass die Zariski-Topologie auf jede affine Varietät noethersch ist.

Aufgabe 5

Finden Sie die irreduzible Zerlegung von $X \subset \mathbb{A}^2(\mathbb{R})$ in irreduzible Komponenten und geben Sie ein Bild von X. Ist X irreduzibel? Ist X zusammenhängend? (bezüglich der Zariski-Topologie)

1. $X = V(X_1 X_2)$.

2. $X = V(X_1^2 - X_1)$.

3. $X = V(X_1 X_2 - 1)$.