Übungen - Blatt 10

→ 11.05.2015

Aufgabe 1

Sei $\mathbf{k}$ unendlich und $p \in \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$.

1. Zu beweisen: die Menge $V_p \subset \mathbf{k}[x_0, x_1, x_2]$ von homogenen Polynomen vom Grad 1, die auf p verschwinden, ist ein Vektorraum von Dimension 2.

2. Man nimmt zwei Elemente $f_0, f_1 \in V_p$, die nicht $\mathbf{k}$-linear abhängig sind, und definiert die Projektion von p als die rationale Abbildung

$$\begin{array}{cccc} f\colon & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^1(\mathbf{k}) \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [f_0(x_0, x_1, x_2) : f_1(x_0, x_1, x_2)]. \end{array}$$

   Beweisen Sie, dass diese rationale Abbildung wohldefiniert ist, bis auf Automorphismus von $\mathbb{P}^1(\mathbf{k})$.

3. Beweisen Sie, dass $\mathrm{dom}(f) = \mathbb{P}^2 \setminus \{p\}$.

Aufgabe 2

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, $C \subset \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ eine Kurve, $p \in C$ ein Punkt und $f\colon \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ die Projektion von p. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Die Einschränkung von f ergibt einen Morphismus $C \to \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ genau dann, wenn $m_p(C) = 1$.

2. Die Einschränkung von f ergibt eine birationale Abbildung $C \to \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ genau dann, wenn $m_p(C) = \deg(C) - 1$.

3. Die Einschränkung von f ergibt einen Isomorphismus $C \to \mathbb{P}^1(\mathbf{k})$ genau dann, wenn $(m_p(C), \deg(C)) \in \{(0,1), (1,2)\}$. Was passiert geometrisch in diesen Fälle?

Aufgabe 3

Sei $\mathbf{k}$ unendlich, seien $p_1 = [1:0:0]$, $p_2 = [0:1:0]$, $p_3 = [0:0:1]$.

1. Beweisen Sie, dass

$$\begin{array}{rccc} \sigma: & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) & \dashrightarrow & \mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \\ & [x_0 : x_1 : x_2] & \mapsto & [x_1x_2 : x_0x_2 : x_0x_1] \end{array}$$

   eine birationale Abbildung ist, die einen Automorphismus von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \setminus V(x_0x_1x_2) \simeq (\mathbf{k}^*)^2$ induziert.

2. Sei $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve, die nicht gleich $V(x_i)$ ist, für $i = 0,1,2$. Beweisen Sie, dass die Einschränkung von σ eine birationale Abbildung $C \dashrightarrow D$ ergibt, wo D eine Kurve von $\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ ist, so dass

$$\begin{array}{rcl} \deg(D) & = & 2\deg(C) - \sum_{i=1}^{3} m_{p_i}(C), \\ m_{p_1}(D) & = & \deg(C) - m_{p_2}(C) - m_{p_3}(C), \\ m_{p_2}(D) & = & \deg(C) - m_{p_1}(C) - m_{p_3}(C), \\ m_{p_3}(D) & = & \deg(C) - m_{p_1}(C) - m_{p_2}(C). \end{array}$$

Aufgabe 4

Sei $\mathbf{k}$ unendlich und $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine Kurve.

1. Wenn $\deg(C) = 2$, gibt es eine birationale Abbildung $\mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, so dass die Einschränkung auf C eine birationale Abbildung $C \dashrightarrow L$ induziert, wobei L eine Gerade ist.

   Tipp: Nehmen Sie drei verschiedene Punkte auf C, beweisen Sie, dass diese nicht kollinear sind, nehmen Sie einen Koordinatenwechsel vor, der diese Punkte auf $[1:0:0]$, $[0:1:0]$ *und* $[0:0:1]$ *schickt und benützen Sie* σ *von Aufgabe* 3.

2. Wenn $\deg(C) = 3$ und C einen singulären Punkt $p \in C$ enthält, gibt es eine birationale Abbildung $\mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, so dass die Einschränkung auf C eine birationale Abbildung $C \dashrightarrow L$ ergibt, wo L eine Gerade ist.

   Tipp: Benutzen Sie zweimal die Idee von 1.

3. Wenn $\deg(C) = 4$ und C zwei verschiedene singuläre Punkte enthält, gibt es eine birationale Abbildung $\mathbb{P}^2(\mathbf{k}) \dashrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$, so dass die Einschränkung auf C eine birationale Abbildung $C \dashrightarrow D$ ergibt, wo D eine Kubik ist.

4. Beweisen Sie, dass die Kurve von Aufgabe 1 von Blatt 8 existiert.