Übungen - Blatt 4

→ 17.10.2014

Aufgabe 1

Finden Sie die Zerlegung von $V(x_1^2+x_2^2-1, x_1x_3) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$ in irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 2

Finden Sie die Zerlegung von

$$V((x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)(x_1^2-2x_1),(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)x_2,(x_1^2+x_2^2+x_3^2-1)x_3x_1) \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$$

in irreduziblen Komponenten.

Aufgabe 3

Sei $X = \{(t,t^2,t^3) \mid t \in \mathbb{C}\} \subset \mathbb{A}^3(\mathbb{C})$. Finden Sie $I(X)$ und beweisen Sie, dass X abgeschlossen und irreduzibel ist.

Aufgabe 4

Finden Sie Gegenbeispiele von Folgerung 2.20, wenn $\mathbf{k} = \mathbb{R}$ oder $\mathbf{k} = \mathbb{F}_p$.

Aufgabe 5

1. Sei R ein faktorieller Ring, $a \in R$ prim. Beweisen Sie, dass es kein Primideal $I \subset R$ gibt, mit $(0) \subsetneq I \subsetneq (a)$.
2. Sei $\mathbf{k}$ ein algebraisch abgeschlossen Körper und $F \subset \mathbf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ ein irreduzibel Polynom. Beweisen Sie, dass es kein irreduzibeln algebraischen Teilmenge $W \subset \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$ gibt, so dass $V(F) \subsetneq W \subsetneq \mathbb{A}^n(\mathbf{k})$.

Aufgabe 6

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $F \in \mathbf{k}[x_1,\ldots,x_n]$ ein Polynomon. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. Wenn F homogen von Grad d ist, gilt $F(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^d F(x_1,\ldots,x_n)$, für jedes $\lambda \in \mathbf{k}$;
2. Wenn $\mathbf{k}$ unendlich ist, und $F(\lambda x_1,\ldots,\lambda x_n) = \lambda^d F(x_1,\ldots,x_n)$, für jedes $\lambda \in \mathbf{k}$, ist auch F homogen von Grad d.

Aufgabe 7

Sei $\mathbf{k}$ ein Körper und $F, G \in \mathbf{k}[x_1, \ldots, x_n]$ homogene Polynomone.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

1. FG ist homogen;
2. Jeder Teiler von F is homogen.

Ist $F + G$ homogen?

Aufgabe 8

Zu welchen Ringen sind $\mathbb{R}[X]/(X^2+1)$ und $\mathbb{R}[X]/(X^2-1)$ isomorph?
Zu welchem Ring ist $\mathbb{R}[X]/(f)$ isomorph, wobei f ein Polynom von Grad 2 ist?