Jérémy Blanc
Christian Urech
Susanna Zimmermann

PROJEKT. ALG. KURVEN UND FLÄCHEN – II
Frühlingsemester 2015

Universität Basel
Mathematik

Übungen - Blatt 9

→ 04.05.2015

In diesem Blatt nehmen wir $\mathbf{k}$ unendlich, $C \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ eine glatte Kurve vom Grad 3 (glatte Kubik) und $O \in C$ ein Wendepunkt.

Aufgabe 1

Seien $p_1, p_2 \in C$ zwei verschiedene Punkte und $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die Gerade durch p_1 und p_2. Bewiesen Sie, dass genau eine der folgenden Aussagen richtig ist:

1. Die Gerade L ist die Tangentenrichtung von C in p_1.
2. Die Gerade L ist die Tangentenrichtung von C in p_2.
3. Es gibt einen eindeutigen Punkt $p_3 \in C \setminus \{p_1, p_2\}$, so dass $C \cap L = \{p_1, p_2, p_3\}$.

Tipp: Bis auf Koordinatenwechsel hat man $p_1 = [1:0:0]$, $p_2 = [0:1:0]$, also ist $L = V(x_2)$. Studieren Sie die Einschränkung der Gleichung von C auf L.

Aufgabe 2

Für jeden $p \in C$ definiert man ein Punkt $-p \in C$ wie folgt:

1. $-O = O$;
2. Wenn $p \neq O$ und die Gerade L durch p und O tangent zu C in p ist, definiert man $-p = p$.
3. Wenn $p \neq O$ und die Gerade L durch p und O nicht tangent zu C in p ist, ist $-p$ der Punkt, so dass $L \cap C = \{p, O, -p\}$.

(i) Beweisen Sie, dass $-p$ wohldefiniert ist: für (3) bemerken Sie, dass $-p$ existiert und eindeutig ist (mit Hilfe von Aufgabe 1, und weil O ein Wendepunkt ist).
(ii) Beweisen Sie, dass $-(-p) = p$. Also ist die Abbildung

$$\begin{array}{ccc} C & \to & C \\ p & \mapsto & -p \end{array}$$

eine Bijektion.
(iii) Beweisen Sie, dass diese Abbildung ein Morphismus ist.
Tipp: Nehmen Sie Koordinaten, so dass C eine Weierstrass Form hat. Die Abbildung C hat also eine schöne Aussicht.

Aufgabe 3

Seien $p_1, p_2 \in C$ zwei verschiedene Punkte und $L \subset \mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die Gerade durch p_1, p_2.
Wir definieren $(p_1 + p_2) \in C$ als $p_1 + p_2 = -q$, wo q wie folgt definiert ist:

1. Wenn $L \cap C$ genau 3 Punkte enthält, ist q so dass $L = \{p_1, p_2, q\}$.
2. Wenn L tangent zu C in p_i ist, definiert man $q = p_i$.

Beweisen Sie, die folgende Behauptungen:

1. $p_1 + p_2 = p_2 + p_1$ für jede zwei verschiedene Punkte $p_1, p_2 \in C$.

2. $p+O=O+p=p$ für jede $p\in C\setminus\{O\}$.

3. $p+(-p)=O$ für jeden Punkt $p\in C$, so dass $p\neq -p$.

Aufgabe 4

Sei $p\in C$ ein Punkt und $L\subset\mathbb{P}^2(\mathbf{k})$ die Tangentegerade von C in p. Wir definieren $(p+p)\in C$ wie folgt:

1. Wenn $L\cap C=\{p\}$ (d.h. wenn p ein Wendepunkt ist) definiert man $p+p=-p$.
2. Wenn $L\cap C=\{p,q\}$ definiert man $p+p=-q$.

Beweisen Sie, die folgende Behauptungen:

1. $p_1+p_2=p_2+p_1$ für jede Punkte $p_1,p_2\in C$.
2. $p+O=O+p=p$ für jede $p\in C$.
3. $p+(-p)=O$ für jeden Punkt $p\in C$.

Aufgabe 5

1. Beweisen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} C\times C & \to & C \\ (p_1,p_2) & \mapsto & p_1+p_2 \end{array}$$

ein Morphismus ist.

Tipp: Schreiben Sie C in der Weierstrass Form und rechnen Sie der Morphismus in Koordinaten.

2. Bemerken Sie damit, dass die Abbildung

$$\begin{array}{rcl} C & \to & C \\ q & \mapsto & q+p \end{array}$$

ein Automorphismus ist, für jedes $p\in C$. Es folgt, dass $\mathrm{Aut}(C)$ transitiv auf C operiert.

Aufgabe 6*

Wir wollen beweisen, dass wir die Struktur einer abelschen Gruppe auf C konstruiert haben, mit $O\in C$ als neutrales Element. Es bleibt die Assoziativität zu beweisen. Also für jede $p_1,p_2,p_3\in C$ möchte man beweisen, dass

$$(p_1+p_2)+p_3=p_1+(p_2+p_3).$$

Beweisen Sie dies mit der Formel die Sie in Aufgabe 5 gefunden haben.