Übungen - Blatt 11

Keine Abgabe wird im Februar korrigiert sein

Aufgabe 1

Gegeben sind die Basen $\mathscr{A} = (v_1, v_2, v_3)$ und $\mathscr{B} = (w_1, w_2, w_3)$ von $\mathbb{R}^3$, wobei

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix}$$

(1) Bestimme die Transformationsmatrix $T^{\mathscr{A}}_{\mathscr{B}}$.
(2) Berechne die Koordinaten des Vektors $v = v_1 + 2v_2 + v_3$ in $\mathbb{R}^3$ bezüglich der Basis $\mathscr{B}$.

Aufgabe 2

Finden Sie eine lineare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, so dass $f(v) = v$ und $f(w) = -w$, wo

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Berechne

$$\det\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right), \ \det\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 6 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 4

Berechne

$$\det\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{pmatrix}\right), \ \det\left(\begin{pmatrix} 1-x & 0 & 0 & x \\ x & 1-x & x & 0 \\ x & -x & 1+x & 0 \\ -x & -x & x & 1+x \end{pmatrix}\right).$$

Aufgabe 5

Beweisen Sie, dass $\operatorname{sign}(\sigma) = -1$ wenn σ ein Transposition ist.

Aufgabe 6*

Beweisen Sie:
Für jede $A \in M(n \times n; K)$ gilt $\det({}^tA) = \det(A)$.
Für jede $A, B \in M(n \times n; K)$ gilt $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$.